

$n + 1$  次元空間内において、同一  $n$  次元超平面上にない  $n + 2$  点を通る  $n$  次元球面を考える。座標系は  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  であるとする。今、球面が通る  $n + 2$  点が次のように与えられているとする。

$$\begin{aligned} & (x_{(1,1)}, x_{(2,1)}, \dots, x_{(n+1,1)}) \\ & (x_{(1,2)}, x_{(2,2)}, \dots, x_{(n+1,2)}) \\ & \dots \\ & (x_{(1,n+2)}, x_{(2,n+2)}, \dots, x_{(n+1,n+2)}) \end{aligned}$$

このとき、球面の中心の  $x_t$  座標 ( $1 \leq t \leq n + 1$ ) は

$$\frac{\sum_{j=1}^{n+2} \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n+1} x_{(i,j)} \right)^2 \left( \sum_{\substack{\sigma \in S_{n+2} \\ \sigma(t)=j}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^{n+1} x_{(i,\sigma(i))} \right) \right\}}{2 \sum_{\sigma \in S_{n+2}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} x_{(i,\sigma(i))}}$$

球面の半径は

$$\frac{\sqrt{\prod_{i < j}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (x_{(k,i)} - x_{(k,j)})^2}}{2 \left| \sum_{\sigma \in S_{n+2}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} x_{(i,\sigma(i))} \right|}$$

で表される。したがって、球面の方程式は

$$\sum_{t=1}^{n+1} \left[ x_t - \frac{\sum_{j=1}^{n+2} \left\{ \left( \sum_{i=1}^{n+1} x_{(i,j)} \right)^2 \left( \sum_{\substack{\sigma \in S_{n+2} \\ \sigma(t)=j}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^{n+1} x_{(i,\sigma(i))} \right) \right\}}{2 \sum_{\sigma \in S_{n+2}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} x_{(i,\sigma(i))}} \right]^2 = \frac{\prod_{i < j}^{n+1} (x_{(k,i)} - x_{(k,j)})^2}{\left( 2 \sum_{\sigma \in S_{n+2}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} x_{(i,\sigma(i))} \right)^2}$$

である。