三角関数の n 倍角の公式について

Iga(rashi)

2008 年 12 月 13 日

三角関数の倍角の公式や 3 倍角の公式はよく知られていますが, では, n 倍角の公式はどのように表されるのか. そんなことを考え, 各種公式を導いてみました. 証明は非常に初等的で, 現行の学習指導要領でいえば, ド・モアブルの定理を除き, 数学 I,II,A,B の範囲内で充分に理解可能です (昔の数学 B の教科書ではド・モアブルの定理も扱われていたのですが).

n 倍角の公式について体系立って書かれているサイトや文書が見当たらなかったため, ここにその証明を記します.

1 余弦の n 倍角の公式

三角関数の倍角の公式の証明には加法定理を用いるのが一般的です. 例えば, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ であることにより $\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$. この方法を使えば任意の n について n 倍角の公式が得られますが, sin と cos に関する限り, そこから規則性を見出すことは困難です. 実際, cos について $n=1$ から 10 まで計算してみると

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \cos\theta \\
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta-1 \\
\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta-3\cos\theta \\
\cos 4\theta &= 8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1 \\
\cos 5\theta &= 16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta \\
\cos 6\theta &= 32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1 \\
\cos 7\theta &= 64\cos^7\theta-112\cos^5\theta+56\cos^3\theta-7\cos\theta \\
\cos 8\theta &= 128\cos^8\theta-256\cos^6\theta+160\cos^4\theta-32\cos^2\theta+1 \\
\cos 9\theta &= 256\cos^9\theta-576\cos^7\theta+432\cos^5\theta-120\cos^3\theta+9\cos\theta \\
\cos 10\theta &= 512\cos^{10}\theta-1280\cos^8\theta+1120\cos^6\theta-400\cos^4\theta+50\cos^2\theta-1
\end{aligned}$$

となり, 最高次の項の係数と定数項以外については, 全く明らかではありません. そのため, ここでは次のド・モアブルの定理を使います (i は虚数単位).

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

二項定理を使って展開すると

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

この左辺の $\sum$ 内は, k が偶数のときは実数, 奇数のときは虚数になるので, 右辺実部の $\cos n\theta$ は, 左辺において k が偶数の場合についての総和になります. 偶数となる k は $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 個あるので,

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} {}_nC_{2k} (\cos\theta)^{n-2k} (-\sin^2\theta)^k$$

すなわち

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} {}_nC_{2k} (\cos\theta)^{n-2k} (\cos^2\theta - 1)^k \tag{1.1}$$

が成り立ちます ($\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表します).

ちなみに, 上の $\cos\theta$ を x で置き換えた多項式

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} {}_nC_{2k} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k \tag{1.2}$$

は, チェビシェフの多項式と呼ばれています.

さて, (1.1) によって cos の n 倍角の公式が一応は得られたわけですが, これには一つ, 難点があります. というのも, 各 j について, $\cos^j\theta$ の係数が式からは明らかでないからです. 実際, (1.1) において $k = 0$ から順に計算していくと, 複数回に渡り同じ次数の cos が現れます. そこで, 以下では (1.1) を

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A(k) \cos^{B(k)}\theta$$

の形に修正することを考えていきます.

まず, (1.1) において, $(\cos^2\theta - 1)^k$ を二項定理を使って展開すると

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} {}_nC_{2k} \cos^{n-2k}\theta \sum_{j=0}^{k} {}_kC_j (\cos^2\theta)^{k-j} (-1)^j \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} {}_nC_{2k} \sum_{j=0}^{k} {}_kC_j (-1)^j \cos^{n-2j}\theta
\end{aligned}$$

となります. 簡単のため, ${}_nC_{2k}$, ${}_kC_j$, $(-1)^j\cos^{n-2j}\theta$ をそれぞれ $f(k)$, $g(k,j)$, $h(j)$ とおくと

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} f(k) \sum_{j=0}^{k} g(k,j)h(j) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \sum_{j=0}^{k} f(k)g(k,j)h(j) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \sum_{k=j}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} f(k)g(k,j)h(j) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} h(j) \sum_{k=j}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} f(k)g(k,j) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} (-1)^j \cos^{n-2j}\theta \sum_{k=j}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} {}_nC_{2k} \cdot {}_kC_j \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \left\{ (-1)^j \left(\sum_{k=j}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} {}_nC_{2k} \cdot {}_kC_j \right) \cos^{n-2j}\theta \right\}
\end{aligned}$$

これにより, 余弦の n 倍角の公式が得られます.

$$\cos n\theta = \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \left\{ (-1)^i \left(\sum_{j=i}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} {}_nC_{2j} \cdot {}_jC_i \cdot \right) \cos^{n-2i}\theta \right\}$$

2 正弦の n 倍角の公式

余弦のときと同様です. ド・モアブルの定理により

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

この左辺の $\sum$ 内は, k が偶数のときは実数, 奇数のときは虚数になるので, 右辺虚部の $\sin n\theta$ は, 左辺において k が奇数の場合についての総和になります. 奇数となる k は $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ 個あるので,

$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k+1}(\cos\theta)^{n-(2k+1)}(\sin\theta)^{2k+1} \tag{2.1}$$

が得られます. 末尾の $(-1)^k$ は, 虚数単位 i を $2k+1$ 乗したときに現れる符号です.

ところで, $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ なので, 以下では cos の次数が 1 以下になるよう式変形することを考えていきます.

n が奇数のとき, $\cos\theta$ の次数 $n-(2k+1)$ が常に偶数になるので

$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k {}_nC_{2k+1}(\cos^2\theta)^{\frac{n-1}{2}-k}(\sin\theta)^{2k+1}$$

n が偶数のとき, $\cos\theta$ の次数 $n-(2k+1)$ が常に奇数になるので

$$\sin n\theta = \cos\theta \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^k {}_nC_{2k+1} (\cos^2\theta)^{\frac{n-2}{2}-k} (\sin\theta)^{2k+1} \tag{2.2}$$

以上 2 つをまとめると

$$\sin n\theta = \cos^{\frac{1+(-1)^n}{2}}\theta \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k+1} (\cos^2\theta)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-k} (\sin\theta)^{2k+1}.$$

$\sin n\theta = A\cos^{\frac{1+(-1)^n}{2}}\theta$, $r = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ とおくと

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k {}_nC_{2k+1} (1-\sin^2\theta)^{r-k} (\sin\theta)^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k {}_nC_{2k+1} \sin^{2k+1}\theta \sum_{j=0}^{r-k} {}_{r-k}C_j (-\sin^2\theta)^j \\
&= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k {}_nC_{2k+1} \sum_{j=0}^{r-k} {}_{r-k}C_j (-1)^j \sin^{2(k+j)+1}\theta
\end{aligned}$$

簡単のため, $(-1)^k {}_nC_{2k+1}$, ${}_{r-k}C_j \sin^{2(k+j)+1}\theta$, $(-1)^j$ をそれぞれ $f(k)$, $g(k,j)$, $h(j)$ とおくと

$$A = \sum_{k=0}^{r} f(k) \sum_{j=0}^{r-k} g(k,j)h(j)$$

今, $\sin\theta$ を $\sum$ の前に出したいのですが, 指数部が $2(k+j)+1$ で k も j も含まれるので, このままでは式変形ができません. そこで, $k+j \leq r$ であることから, $k+j = r-i$ とおきます. すると, $j = r-k-i$, $i = r-k-j$ で, $j : 0 \to r-k$ のとき $i : r-k \to 0$ なので

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{r} f(k) \sum_{i=0}^{r-k} g(k, r-k-i)h(r-k-i) \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{i=0}^{r-k} f(k)g(k, r-k-i)h(r-k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{r-i} f(k)g(k, r-k-i)h(r-k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{r-i} (-1)^k {}_nC_{2k+1} \cdot {}_{r-k}C_{r-k-i} \sin^{2(r-i)+1}\theta (-1)^{r-k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{r} \left\{ (-1)^{r-i} \left(\sum_{k=0}^{r-i} {}_nC_{2k+1} \cdot {}_{r-k}C_i \right) \sin^{2(r-i)+1}\theta \right\}
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\sin n\theta &= \cos^{\frac{1+(-1)^n}{2}}\theta \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \left\{ (-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-i} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-i} {}_nC_{2j+1} \cdot {}_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-j}C_i \right) \sin^{2(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-i)+1}\theta \right\} \\
&= \cos^{\frac{1+(-1)^n}{2}}\theta \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \left\{ (-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-i} \left(\sum_{j=i}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} {}_nC_{2(j-i)+1} \cdot {}_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-(j-i)}C_i \right) \sin^{2(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-i)+1}\theta \right\}
\end{aligned}$$

3　正接の n 倍角の公式

正接の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

を繰り返し用いることにより, 各 n について $\tan n\theta$ を $\tan\theta$ を使って表すことができます. 今, $\tan\theta=x$ とおき, $n=1$ から 5 まで計算してみると

1. $\tan\theta=\dfrac{x}{1}$
2. $\tan 2\theta=\dfrac{2x}{1-x^2}$
3. $\tan 3\theta=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$
4. $\tan 4\theta=\dfrac{4x-4x^3}{1-6x^2+x^4}$
5. $\tan 5\theta=\dfrac{5x-10x^3+x^5}{1-10x^2+5x^4}$

これらの分母と分子の各項を先頭から順番に見ていくと, その係数の絶対値が二項係数になっていることが分かります. このことから, 次の等式が成り立つことが予想されます.

$$\tan n\theta=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k+1}x^{2k+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k}x^{2k}}\tag{3.1}$$

以下, これが正しいことを数学的帰納法により証明します. つまり, (3.1) が成り立っていることを仮定して

$$\tan(n+1)\theta=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{(n+1)-1}{2}\rfloor}(-1)^k{}_{n+1}C_{2k+1}x^{2k+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(-1)^k{}_{n+1}C_{2k}x^{2k}}$$

が正しいことを証明します.

証明においては, ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$ である事実を用います.

$$\begin{aligned}{}_nC_r+{}_nC_{r-1}&=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}\\&=\frac{\{(n-r+1)+r\}n!}{r!(n-r+1)!}\\&=\frac{(n+1)!}{r!\{(n+1)-r\}!}\\&={}_{n+1}C_r\end{aligned}$$

(3.1) が正しいことを仮定し, $\tan((n+1)\theta)$ を計算してみると

$$
\begin{aligned}
\tan((n+1)\theta) &= \tan(n\theta+\theta) \\
&= \frac{\tan n\theta + \tan\theta}{1-\tan n\theta \tan\theta} \\
&= \frac{\tan n\theta + x}{1 - x\tan n\theta} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k+1} x^{2k+1} + x\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k} x^{2k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k} x^{2k} - x\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k+1} x^{2k+1}} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k} x^{2k+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^{k+1} {}_nC_{2k+1} x^{2k+2}}
\end{aligned}
$$

となります. まずは分子について証明します.

(I-i) n が奇数のとき, $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ なので

$$
\begin{aligned}
\text{分子} &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} (-1)^k ({}_nC_{2k+1} + {}_nC_{2k}) x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{(n+1)-1}{2}\rfloor} (-1)^k {}_{n+1}C_{2k+1} x^{2k+1}
\end{aligned}
$$

(I-ii) n が偶数のとき, $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor + 1 = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ なので

$$
\begin{aligned}
\text{分子} &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} (-1)^k {}_nC_{2k} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^k ({}_nC_{2k+1} + {}_nC_{2k}) x^{2k+1} + (-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} {}_nC_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} x^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}
\end{aligned}
$$

ここで, ${}_nC_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} = {}_nC_n = {}_{n+1}C_{n+1} = {}_{n+1}C_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}$ なので,

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} (-1)^k {}_{n+1}C_{2k+1} x^{2k+1} + (-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} {}_{n+1}C_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1} x^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{(n+1)-1}{2}\rfloor} (-1)^k {}_{n+1}C_{2k+1} x^{2k+1}
\end{aligned}
$$

次に, 分母について.

(II-i) n が奇数のとき, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ なので

$$
\begin{aligned}
\text{分母} &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^{k+1}{}_nC_{2k+1}x^{2k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k}x^{2k} + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1}(-1)^{(k-1)+1}{}_nC_{2(k-1)+1}x^{2(k-1)+2} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k}x^{2k} + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}(-1)^k{}_nC_{2k-1}x^{2k} \\
&= (-1)^0{}_nC_{2\cdot0}x^{2\cdot0} + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k({}_nC_{2k} + {}_nC_{2k-1})x^{2k} + (-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}{}_nC_{2(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)-1}x^{2(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)} \\
&= (-1)^0{}_{n+1}C_{2\cdot0}x^{2\cdot0} + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_{n+1}C_{2k}x^{2k} + (-1)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}{}_nC_{2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-1}x^{2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}
\end{aligned}
$$

ここで, ${}_nC_{2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-1} = {}_nC_n = {}_{n+1}C_{n+1} = {}_{n+1}C_{2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}$ なので

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^0{}_{n+1}C_{2\cdot0}x^{2\cdot0} + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_{n+1}C_{2k}x^{2k} + (-1)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}{}_{n+1}C_{2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}x^{2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(-1)^k{}_{n+1}C_{2k}x^{2k}
\end{aligned}
$$

(II-ii) n が偶数のとき, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor + 1$ なので

$$
\begin{aligned}
\text{分母} &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^{k+1}{}_nC_{2k+1}x^{2k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k}x^{2k} + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1}(-1)^{(k-1)+1}{}_nC_{2(k-1)+1}x^{2(k-1)+2} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k}x^{2k} + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k-1}x^{2k} \\
&= (-1)^0{}_nC_{2\cdot0}x^{2\cdot0} + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k({}_nC_{2k} + {}_nC_{2k-1})x^{2k} \\
&= (-1)^0{}_{n+1}C_{2\cdot0}x^{2\cdot0} + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_{n+1}C_{2k}x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(-1)^k{}_{n+1}C_{2k}x^{2k}
\end{aligned}
$$

以上により, $n+1$ のときも成り立ちます. $n=1$ のときに成り立つことは明らかです.

4　まとめ

$$\sin n\theta = \cos^{\frac{1+(-1)^n}{2}}\theta \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\left\{(-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - i}\left(\sum_{j=i}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}{}_nC_{2(j-i)+1}\cdot{}_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-(j-i)}C_i\right)\sin^{2(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor - i)+1}\theta\right\}$$

$$\cos n\theta = \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\left\{(-1)^i\left(\sum_{j=i}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{}_nC_{2j}\cdot{}_jC_i\cdot\right)\cos^{n-2i}\theta\right\}$$

$$\tan n\theta = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k+1}\tan^{2k+1}\theta}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k{}_nC_{2k}\tan^{2k}\theta}$$