n 人でじゃんけんをしてあいこになる確率

Iga(rashi)

2009 年 1 月 5 日

n 人でじゃんけんをしてあいこになる確率の求め方を 3 通り紹介します.

1

n 人でじゃんけんをしてあいこになるのは, n 人でじゃんけんをし, 勝ち組と負け組に分かれる場合の余事象です. 勝ち組と負け組に分かれるのは, n 人が出した手が 2 種類の場合に限ります. 勝つ手を決めれば負ける手が決まるので, 2 種類の手の選び方は 3 通り. n 人の 2 種類の手の出し方は, 全員が同じ手を出す場合の 2 通りを引いて $2^n - 2$ 通り. したがって, 求める確率は

$$1 - \frac{3(2^n - 2)}{3^n} = 1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$$

2

1 と同じで, 勝ち組と負け組に分かれる場合を考えます. 勝ち組と負け組に分かれるのは, k 人が勝ち組に入るとすると, その k 人の選び方が ${}_nC_k$ 通りあって, どの手で勝つかで 3 通り. 勝ち組の人数は 1 人から $n-1$ 人までの場合があるので, これらの和を取ることによって

$$\begin{aligned} & 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3 \times {}_nC_k}{3^n} \\ &= 1 - \frac{1}{3^{n-1}} \left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k - {}_nC_0 - {}_nC_n \right) \\ &= 1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

3

n 人でじゃんけんをしてあいこになるのは, グー, チョキ, パーの 3 種類が揃っている場合か, n 人全員の手が同じ場合です. まずは前者について考えてみると, これは「グー, チョキ, パーの 3 種類を重複を許して n 人が出したとき, その中に 3 種類全てが揃っている場合」です. ここで, 「r 個の異なる物を重複を許して n 個並べたとき, その中に r 種類全てが揃っている場合の数」は

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} {}_rC_i i^n$$

で表されます．そして，この公式に $r=3$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}(-1)^{3-i}{}_3C_i i^n \\
&= (-1)^{3-1}{}_3C_1 1^n + (-1)^{3-2}{}_3C_2 2^n + (-1)^{3-3}{}_3C_3 3^n \\
&= 3 - 3\cdot 2^n + 3^n
\end{aligned}
$$

が得られます．次に後者について考えてみると，これは明らかに 3 通りです．よって，求める確率は

$$
\begin{aligned}
&\frac{3 - 3\cdot 2^n + 3^n + 3}{3^n} \\
&= \frac{2 - 2^n + 3^{n-1}}{3^{n-1}} \\
&= 1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}
\end{aligned}
$$

となります．