べき乗和の公式

Iga(rashi)

2008 年 12 月 7 日

1　べき乗和の公式 - 漸化式バージョン

現行の学習指導要領の数学 B の教科書では, 次の 4 つのべき和公式が扱われています.

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = n$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

最初の 2 つは, それぞれ n 個の 1 の和, 1 から始まる n 個の連続自然数の和です. これらを一般化することを考えます. まず, $S(k,n)$ を

$$S(k,n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$$

で定義します. つまり, 1 から n までの k 乗和です.

最初に, $S(m,n)$ が満たす漸化式を求めることを考えます.

$$\begin{aligned}(i+1)^{k+1} - i^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k+1} {}_{k+1}C_j i^j - i^{k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}C_j i^j\end{aligned}$$

$i=1$ から n まで, この総和をとると

$$(n+1)^{k+1} - 1^{k+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}C_j i^j$$

となるので, 移項して

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} &= 1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}C_j i^j \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{n} {}_{k+1}C_j i^j \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}C_j \sum_{i=1}^{n} i^j \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}C_j S(j,n) \\
&= 1 + {}_{k+1}C_k S(k,n) + \sum_{j=0}^{k-1} {}_{k+1}C_j S(j,n) \\
&= 1 + (k+1)S(k,n) + \sum_{j=0}^{k-1} {}_{k+1}C_j S(j,n)
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
S(k,n) = \frac{1}{k+1}\left\{(n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} {}_{k+1}C_j S(j,n)\right\} \tag{1.1}
$$

が成り立ちます. この式から, $S(k,n)$ は n の $k+1$ 次の多項式として表すことができることが分かります.

$$
S(k,n) = \sum_{i=0}^{k+1} a(i,k) n^i
$$

また, (0.1) と, $S(0,n) = n$ であることにより, 任意の k について $S(k,n)$ は定数項を含みません. よって, $a(0,k) = 0$ です.

さて, ここまでの結果から, $S(k,n)$ の公式を n の多項式として具体的に計算できることが分かりました. しかし, それを実際に計算するのはとても面倒な作業です. そこで, 以下では微分を使って, 各 $a(i,k)$ を求めます.

まず, n 次の多項式 $f(x)$ が, 次のように表されることを確認します.

$$
f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i
$$

ここで, $f^{(i)}(x)$ は $f(x)$ の第 i 次導関数を表します. 特に, $f'(x) = f^{(1)}(x)$ です. 例えば, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
f^{(1)}(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\
f^{(3)}(x) &= 6ax + 2b \\
f^{(4)}(x) &= 6a
\end{aligned}
$$

なので,

$$\begin{aligned} f^{(0)}(0) &= 0! \cdot d \\ f^{(1)}(0) &= 1! \cdot c \\ f^{(3)}(0) &= 2! \cdot b \\ f^{(4)}(0) &= 3! \cdot a \end{aligned}$$

となります. 厳密な証明は必要ないでしょう.

ここから, 微分を使って $a(i,k)$ を求めていくわけですが, 次の事実が有用です.

$$S(k, i+1) - S(k, i) = (i+1)^k$$

両辺を微分し, その総和をとると

$$\begin{aligned} S'(k, i+1) - S'(k, i) &= \left\{(i+1)^k\right\}' \\ \sum_{i=0}^{n-1} \{S'(k, i+1) - S'(k, i)\} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{(i+1)^k\right\}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= S'(k, n) - S'(k, 0) = S'(k, n) - a(1, k) \\ (\text{右辺}) &= k \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^{k-1} \\ &= k \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} \\ &= kS(k-1, n) \end{aligned}$$

以上により,

$$S'(k, n) = kS(k-1, n) + a(1, k)$$

が得られます. これを次々微分していくと

$$\begin{aligned} S^{(2)}(k, n) &= kS'(k-1, n) \\ &= k\{(k-1)S(k-2, n) + a(1, k-1)\} \\ &= k(k-1)S(k-2, n) + ka(1, k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{(3)}(k, n) &= kS^{(2)}(k-1, n) \\ &= k\{(k-1)(k-2)S(k-3, n) + (k-1)a(1, k-2)\} \\ &= k(k-1)(k-2)S(k-3, n) + k(k-1)a(1, k-2) \end{aligned}$$

となるので,

$$S^{(i)}(k, n) = {}_kP_i S(k-i, n) + {}_kP_{i-1} a(1, k-i+1)$$

各 k について, $S(k,n)$ は定数項を含まないので, $S(k,0)=0$ です. よって,

$$S^{(i)}(k, 0) = {}_kP_{i-1} a(1, k-i+1)$$

このことと, 先の補題と, $S^{(0)}(k,0) = S(k,0) = 0$ であることにより

$$\begin{aligned} S(k,n) &= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{S^{(i)}(k,0)}{i!} n^i \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{{}_kP_{i-1}}{i!} a(1,k-i+1) n^i \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{{}_{k+1}P_i}{i!} a(1,k-i+1) n^i \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} {}_{k+1}C_i a(1,k-i+1) n^i \end{aligned}$$

ここで, $j = k - i + 1$ とおくと $i = k - j + 1$ で, i が 1 から $k+1$ まで変化するとき j は k から 0 まで変化するので

$$\begin{aligned} S(k,n) &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}C_{k-j+1} a(1,j) n^{k-j+1} \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}C_j a(1,j) n^{k-j+1} \end{aligned}$$

となります. よって, あとは $a(1,j)$ の計算式を具体的に書き下すことができれば完了です. ちなみに, $a(1,j)$ はベルヌーイ数と呼ばれるもので j 番目のベルヌーイ数は通常 B_j で表されます. したがって, 以下では B_j を表す式を見つけることを考えていきます.

2　マクローリン展開

証明は他書に譲りますが, 適当な区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ は次のような形に表すことができ, これを $f(x)$ のマクローリン展開と呼びます.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

例えば, e^x のマクローリン展開は, e^x は何度微分しても e^x のままなので, 任意の n について $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ であることから

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

となります. $\log(x)$ については, $\log(0)$ が定義されないという技術的理由から, 代わりに $f(x) = \log(x+1)$ を考えることにします. $f(x)$ を次々微分していくと

$$f'(x) = (x+1)^{-1}, f^{(2)}(x) = -(x+1)^{-2}, f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3}, \cdots$$

となるので,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \log(x+1) & (n = 0) \\ \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n n!} & (n \geq 1) \end{cases}$$

よって,

$$\begin{aligned} \log(x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \log(0+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(0+1)^n n!} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} \end{aligned}$$

3 母関数

一般に, 数え上げ関数 $f : N \to N$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

を f の通常母関数といいます．また

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{x^n}{n!}$$

を f の指数型母関数といいます．マクローリン展開に似ていますが, ここで $f(n)$ は与えられた関数の第 n 次導関数に 0 を代入したものとして定義されるものではなく, これ自体が先に与えられているものです．今後はマクローリン展開との関係から, 指数型母関数のみを扱っていきます.

あとから使うことになるので, 今, n 個の異なる物を m 個の異なるグループに各グループには最低 1 個は物が入るように分ける場合の数

$$m!\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^n$$

の母関数の値を求めます．$i = 1$ からではなく $i = 0$ からの和を取っても同じであることと, 二項定理を用いることにより

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} m!\left\{ {n \atop m} \right\} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^n \right\} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \frac{(it)^n}{n!} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \frac{(it)^n}{n!} \\
&= \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{m-i} e^{it} \\
&= (e^t - 1)^m
\end{aligned}$$

このことから, 第二種スターリング数の母関数が次で表されることが分かります.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^n \right\} \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{(e^t - 1)^m}{m!}
\end{aligned}$$

4　ベルヌーイ数

$$S(k,n)=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}{}_{k+1}C_jB_jn^{k-j+1}$$

上の多項式に $n=1$ を代入すると

$$S(k,1)=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}{}_{k+1}C_jB_j$$

$S(k,1)=1$ なので

$$\sum_{j=0}^{k}{}_{k+1}C_jB_j=k+1$$

これを利用します. B_n の指数型母関数の値を求めたいのです.

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}$$

上の漸化式により, n を $n-1$ に置き換えて

$$\sum_{i=0}^{n}{}_{n+1}C_iB_i=n+1$$
$$\sum_{i=0}^{n-1}{}_{n}C_iB_i=n$$

B_n の母関数に似せて, 次の形を作ります.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}{}_{n}C_iB_i\right)\frac{t^n}{n!}$$

n が 1 から始まるのは, i が 0 から $n-1$ まで動くからです. ところで,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}{}_{n}C_iB_i\right)\frac{t^n}{n!}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\cdot t\\&=te^t\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}{}_{n}C_iB_i\right)\frac{t^n}{n!}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n!}{i!(n-i)!}B_i\right)\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{B_i}{i!}\cdot\frac{1}{(n-1)!}\right)t^n\end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right)$$

なので,

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right) \\ &= (e^t - 1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\right) \end{aligned}$$

以上により

$$(e^t - 1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\right) = te^t \tag{4.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{te^t}{e^t - 1} \tag{4.2}$$

今,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{t^n}{n!}$$

となるような $f(n)$ を求めることができれば, これが B_n の一般項です. そこで, $\frac{te^t}{e^t-1}$ を無限和を使って表現するため, 次のような式変形をします.

$$\begin{aligned} \frac{te^t}{e^t - 1} &= \frac{t}{1 - e^{-t}} \\ &= \frac{-\log(1 - (1 - e^{-t}))}{1 - e^{-t}} \end{aligned}$$

これにより

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{-\log(1 - (1 - e^{-t}))}{1 - e^{-t}}$$

$-\log(1-t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m}$ の t に $1-e^{-t}$ を代入して

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-e^{-t}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^m}{m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{m-1}}{m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^m}{m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(e^{-t}-1)^m}{m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{m!}{m+1} \sum_{n=m}^{\infty} \{n, m\} \frac{(-t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{m!}{m+1} \{n, m\} \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
B_n &= (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{m!}{m+1} \{n, m\} \\
&= (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{m!}{m+1} \left\{ \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} {}_mC_i \cdot i^n \right\} \\
&= (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m} (-1)^i {}_mC_i \cdot i^n
\end{aligned}
$$

これで, B_n の一般項が分かりました.

5　まとめ

B_n の一般項が分かったので, これを使って $S(k,n)$ を表すと

$$\begin{aligned} S(k,n) &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}C_j B_j n^{k-j+1} \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}C_j \left\{ (-1)^j \sum_{m=0}^{j} \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m} (-1)^i {}_mC_i \cdot i^j \right\} n^{k-j+1} \end{aligned}$$

変数をちょっと変えると

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} {}_{m+1}C_i \left\{ (-1)^i \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k {}_jC_k \cdot k^i \right\} n^{m-i+1}$$