n 個のボールを r 個の箱に分ける場合の数

Iga(rashi)

2008 年 12 月 21 日

唐突ですが「n 個のボールを r 個の箱に分ける方法は何通りあるか」という問題について考えてみましょう. 高校数学の教科書に一度は出てきそうなこの問題, 一見すると単純そうですが, これがなかなかどうして奥が深いのです. 実は, この種の問題のあるものは, 数論における有名な未解決問題なのです！

まずは問題を分類して考えます. ボールも箱も, 区別できる場合と区別できない場合の 2 つのバリエーションがあります. また, ボールの箱への入れ方については, それぞれの箱には最低 1 個は入れるとか, それぞれの箱に入るボールの数は高々 1 個だとか, そういう条件を付けることができます. というわけで, これらをまとめると, $2 \times 2 \times 3 = 12$ パターンの問題ができます. あらあら, 意外に多いものですね.

ボール	箱	制限なし	最低 1 個	高々 1 個
異	異			
異	同			
同	異			
同	同			

以下では, この表に埋まる式を求めていきたいと思います.

1　ボールも箱も区別できる場合

(1) ボールの箱への入れ方に特に制限がないならば, 話はとっても簡単です. n 個のボールにそれぞれ番号をつけると, 1 番目のボールの箱への入れ方が r 通りあり, n 番目のボールまで同様. したがって, r 通りを n 個かけて

$$r^n$$

です. めでたし.

(2) 箱には高々 1 個しかボールを入れられない場合. ボールの方が箱より多かったらアウトです. さようなら. よって, $n \leq r$ という条件が必要です. ボールの個数が箱の個数以下だった場合. 1 番目のボールの箱への入れ方は r 通りあります. 2 番目のボールの箱への入れ方は, 1 番目のボールが入っていない $r-1$ 個の箱から 1 つ選ぶから $r-1$ 通り. 以下, n 番目のボールまで続きます. したがって,

$$r(r-1)\cdots(r-n+1) = {}_rP_n$$

です. ついでに言うと, $n > r$ の場合には ${}_rP_n = 0$ と定義すれば矛盾しません.

(3) それぞれの箱には最低 1 個はボールを入れる場合. 実は, この問題が, 数論の有名な未解決問題に次いで一番難しい問題です. 個数関数を求めることはできるのですが, それには様々な難しい証明が知られています.

しかし！高校生でも理解できるような, 比較的難しくない方法もあります. それを紹介します.

前提として, $n \geq r$ という条件が必要です. ボールが箱よりも少なかったら, それぞれの箱に最低 1 個はボールが入るようにはできませんので. それから, 個数関数を便宜的に $f(n,r)$ と表すことにしておきます.

簡単な場合から順に考えていきます.

箱が 1 個しかなかったら. 1 通りです. 当り前です.

$$f(n,1) = 1$$

箱が 2 個だったらどうでしょう. 制限がないならば, ボールの箱への入れ方は 2^n 通りです. 何故なら, n 個あるそれぞれのボールについて, どちらの箱に入れるかで 2 通りあるから. ところが, この中には, 片方の箱にしかボールが入っていない場合が ${}_2C_1$ 通りあります. 片方の箱へのボールの入れ方は $f(n,1)$ 通りあるので

$$f(n,2) = 2^n - {}_2C_1 f(n,1)$$

次に, 箱が 3 個だったらどうでしょう. 2 個のときと同じように考えて, 制限がないなら 3^n 通り. ところが, この中には, 1 個の箱にしかボールが入っていない場合と, 2 個の箱にしかボールが入っていない場合が含まれています. 1 個の箱にしかボールが入っていない場合は, それがどの箱であるかで ${}_3C_1$ 通り. 2 個の箱にしかボールが入っていない場合は, 3 個の箱から 2 個選ぶ場合の数は ${}_3C_2$ で, その各々についてボールの入れ方が $f(n,2)$ 通りあります. 以上まとめると

$$f(n,3) = 3^n - {}_3C_1 f(n,1) - {}_3C_2 f(n,2)$$

余談ですが, $f(n,2)$ と $f(n,3)$ を求める問題が, 過去に東北大学の入試問題として出題されています.

さて, 以上の考察から, 次の漸化式が成り立つことが分かります.

$$\begin{aligned} f(n,1) &= 1 \\ f(n,m) &= m^n - \sum_{k=1}^{m-1} {}_mC_k \cdot f(n,k) \end{aligned}$$

この漸化式を解けばよいのです. ところが, どうやって解けばよいのやら, 分かりません. そこで, $f(n,r)$ を具体的に計算していって, 規則性を探ってみます. そこから式を類推することができたなら, あとはそれを数学的帰納法で証明すればよいのです.

それでは, 漸化式をもとにして, $f(n,1)$ から $f(n,7)$ までを求めてみると

$$\begin{aligned} f(n,1) &= 1^n \\ f(n,2) &= 2^n - 2 \cdot 1^n \\ f(n,3) &= 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 1^n \\ f(n,4) &= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 \cdot 1^n \\ f(n,5) &= 5^n - 5 \cdot 4^n + 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n + 5 \cdot 1^n \\ f(n,6) &= 6^n - 6 \cdot 5^n + 15 \cdot 4^n - 20 \cdot 3^n + 15 \cdot 2^n - 6 \cdot 1^n \\ f(n,7) &= 7^n - 7 \cdot 6^n + 21 \cdot 5^n - 35 \cdot 4^n + 35 \cdot 3^n - 21 \cdot 2^n + 7 \cdot 1^n \end{aligned}$$

となります. 慣れないと気付きにくいのですが, これらの i^n の係数の絶対値に注目してみると, それぞれ, 二項係数になっていることが分かります. このことから, 次の等式が成り立つことが推測できます.

$$f(n,r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \cdot {}_rC_i \cdot i^n \tag{1.1}$$

以下, これが正しいことを n を固定して数学的帰納法で証明します. $r=1$ から $m-1$ まで, 等式が成り立っていると仮定し, 各 $f(n,r)$ を求めてみると,

$$\begin{aligned}
f(n,1) &= {}_1C_1 \cdot 1^n \\
f(n,2) &= {}_2C_2 \cdot 2^n - {}_2C_1 \cdot 1^n \\
f(n,3) &= {}_3C_3 \cdot 3^n - {}_3C_2 \cdot 2^n + {}_3C_1 \cdot 1^n \\
f(n,4) &= {}_4C_4 \cdot 4^n - {}_4C_3 \cdot 3^n + {}_4C_2 \cdot 2^n - {}_4C_1 \cdot 1^n \\
f(n,5) &= {}_5C_5 \cdot 5^n - {}_5C_4 \cdot 4^n + {}_5C_3 \cdot 3^n - {}_5C_2 \cdot 2^n + {}_5C_1 \cdot 1^n \\
&\vdots \\
f(n,m-1) &= {}_{m-1}C_{m-1} \cdot (m-1)^n - {}_{m-1}C_{m-2} \cdot (m-2)^n + \cdots
\end{aligned}$$

よって,

$$f(n,m) = m^n - \sum_{k=1}^{m-1} {}_mC_k \cdot f(n,k)$$

における i^n $(1 \leq i \leq m-1)$ の係数は

$$-\sum_{k=i}^{m-1} {}_mC_k \cdot (-1)^{k-i} \cdot {}_kC_i = (-1)^{m-i} \cdot {}_mC_i - \sum_{k=i}^{m} (-1)^{k-i} \cdot {}_mC_k \cdot {}_kC_i \tag{1.2}$$

です. どうしてこのような式変形をするのかというと, このようにすると $(-1)^{m-i} \cdot {}_mC_i$ の部分が (1.1) と同じになるからです. さらに, 右辺の $\sum$ 以下が 0 になると, 上手い具合に (1.1) が導かれるのです. ここで,

$$\begin{aligned}
{}_mC_k \cdot {}_kC_i &= \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{k!}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{m!}{i!} \cdot \frac{1}{(m-k)!(k-i)!} \\
&= \frac{m!}{i!(m-i)!} \cdot \frac{(m-i)!}{(m-k)!(k-i)!} \\
&= {}_mC_i \cdot {}_{m-i}C_{m-k}
\end{aligned}$$

したがって, (1.2) の $\sum$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{m} (-1)^{k-i} \cdot {}_mC_k \cdot {}_kC_i &= \sum_{k=i}^{m} (-1)^{k-i} \cdot {}_mC_i \cdot {}_{m-i}C_{m-k} \\
&= {}_mC_i \sum_{k=i}^{m} (-1)^{(m-i)-(m-k)} \cdot {}_{m-i}C_{m-k}
\end{aligned}$$

今, $m-i$ を n, $m-k$ を r とおくと, $k : i \to m$ のとき $m-k : m-i \to 0$ だから, 二項定理により

$$\begin{aligned}
&= {}_mC_i \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \cdot 1^r \cdot (-1)^{n-r} \\
&= {}_mC_i (1-1)^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって, (1.2) により, $f(n,m)$ における i^n $(1 \leq i \leq m-1)$ の係数は $(-1)^{m-i} \cdot {}_mC_i$ なので,

$$\begin{aligned} f(n,m) &= m^n + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m-i} \cdot {}_mC_i \cdot i^n \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \cdot {}_mC_i \cdot i^n \end{aligned}$$

以上により, (1.1) は $r = 1, 2, \cdots m-1$ のときに成り立つならば $r = m$ のときに成り立つことが分かりました. $r = 1$ のときは自明なので, 数学的帰納法により, 全ての r について成り立ちます. したがって,

$$f(n,r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \cdot {}_rC_i \cdot i^n$$

…証明完了です. お疲れ様でした. $n < r$ の場合には, $f(n,r) = 0$ と定義しましょう.

2　ボールが区別でき, 箱が区別できない場合

ここでの話はとっても簡単です. というのも, 1. での結果を使うことによって, 即座に結果が出せるからです.

(1) 各箱に最低 1 個はボールを入れる場合. これは 1.(3) の問題の, 箱が区別できなくなったバージョンです. 1.(3) の問題において, r 個の箱にはそれぞれ最低 1 個はボールが入っているので, それぞれの箱を同一視すると場合の数は $\frac{1}{r!}$ に減ります. よって,

$$\frac{1}{r!} \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \cdot {}_rC_i \cdot i^n$$

$n < r$ の場合には 0 と定義するのも同様です. ちなみに, 巷ではこれは第二種スターリング数と呼ばれています. 第一種スターリング数もありますが, 本質的には同じものです.

(2) ボールの箱への入れ方に制限がない場合. 箱はそれぞれ区別できないので, 1 個の箱にだけボールが入っている場合, 2 個の箱にだけボールが入っている場合, …と続き, r 個全ての箱にボールが入っている場合までを全て足せばよいので, これは (1) の結果にさらに $\sum$ を適用して

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} \cdot {}_iC_j \cdot j^n$$

です. ただし, $n < r$ の場合には注意が必要です. というのも, $n \geq r$ という条件が必要な (1) の結果を使っているからです. このことの意味を考えてみると, $n < r$ の場合は全て $n = r$ の場合と同一視することからできるからと, 理由付けをすることができます. それならば, $n < r$ なる任意の r については, その結果を $n = r$ の場合と同じだとみなしてよいことが分かります. ちなみに, $r = n$ のとき, これはベル数と呼ばれます.

(3) それぞれの箱には高々 1 個しかボールを入れられない場合. $n > r$ の場合にはボールが余るので分けられません. よって, このときは 0 と定義します. では, $n \leq r$ の場合はどうか. 「区別の付かない r 個の箱がありました. それぞれの箱には高々 1 個しかボールを入れることができません. 何通りの入れ方があるでしょうか.」箱の区別が付かない以上, どのボールをどの箱に入れようが同じことです. また, どのボールもいずれかの箱に必ず単独で入るので, 入れ方に区別を付けることもできません. したがって,

通り．です．あれまぁ．こんなこともあるのですね．

3　ボールが区別できず，箱が区別できる場合

2. ほどではないですが，難しくはありません．簡単な方から順にいきたいと思います．

(1) それぞれの箱には高々 1 個しかボールが入らないとき．当然のことながら $n \leq r$ です．そうでない場合には 0 と定義するのはこれまで通り．それはそれとして，区別ができる r 個の箱に，区別のつかない n 個のボールを高々 1 個入れるのです．したがって，r 個の箱の中から，ボールを入れる n 個を選べばよいので

$$ {}_rC_n $$

です．随分初等的な関数が出てきましたね．

(2) それぞれの箱には最低 1 個はボールを入れるとき．$n \geq r$ です．そうでなければ 0．まずは，ボールを一列に並べます．ずらーっと．そのあと，この列を r 個のグループに分断します．ずばっと．そうして，最初のグループから順に箱を割り当てていけばよいのです．このときの場合の数は，ずらーっと並べた n 個のボールの $n-1$ 個の隙間に $r-1$ 個の仕切り板を入れる場合に等しいので

$$ {}_{n-1}C_{r-1} $$

です．また C が出てきましたね．次はどうでしょう．

(3) 特に制限がない場合．考え方が特殊なのですが，全ての箱にとりあえず 1 個ずつ，合計 r 個のボールが既に入っているものと考えちゃいます．そう考えても場合の数は変わりません．その上で，各箱に改めて n 個のボールを入れていくのです．すると，ボールは合わせて $n+r$ 個あり，これを各箱に最低 1 個は入るように入れていくので，すなわち，(2) において n が $n+r$ になった場合に相当します．よって，

$$ {}_{n+r-1}C_{r-1} = {}_{n+r-1}C_n $$

です．また C なのでした．でも，これは別名重複組合せと呼ばれ，${}_rH_n$ とも書かれます．現行の学習指導要領で言えば数学 A の範囲内のもので，教科書によっては扱われています．

4　ボールが区別できず，箱も区別できない場合

さあ，いよいよ最後です．ここまでは順調に事が運んできました．しかし，数論における未解決問題が残されているのです．つまり，この場合において未解決問題が顔を出すのであります．

(1) 各箱には高々 1 個しかボールを入れられない場合．$n > r$ なら，ボールが余るのでダメですね．ダメ．$n \leq r$ なら，手当たり次第，目についた箱にボールを 1 個ずつ入れていって終わりです．よって

$$ 1 $$

通りです．先と同じ結果が出ました．こんなこともあるのです．

さて，残りの場合についてはどうでしょうか．まず，各箱に最低 1 個はボールを入れる場合．これは、自然数の分割という問題に絡んでいます．自然数 n を順番を考慮しないで r 個の自然数の和として表す場合の数が，今の問題の場合の数に等しいことは明らかです．では，それを n と r を使って上手い具合に表すことができるのかというと，実はこれが未解決問題なのです．この場合の数を与える関数をとりあえず $P(n,r)$ とでもおい

てやると, 特に制限がない場合の数, すなわち自然数 n を順番を考慮しないでいくつかの自然数の和として表す場合の数を $P(n)$ で表すことにすると $P(n) = \sum_{r=1}^{n} P(n,r)$ となりますが, これを有限個の有理数の和として表す公式は発見されていません. 無限個の無理数の和として表される公式なら知られているのですが. もし $P(n,r)$ を有限個の有理数の和として表すことができたなら, 上記のように $r = 1$ から n までの和を取れば $P(n)$ もそのようにできるはずですが, これが未解決なのですから, $P(n,r)$ についても未解決である, ということです. ここまで順調にきていたのですから, 自然な公式がないのも不自然な話です. もしかしたら, いずれは解決される問題なのかもしれません.

5　最低 1 個かつ高々 1 個の場合

これまで述べてきませんでしたが, 最低 1 個という条件と高々 1 個という条件を組み合わせることができます. すると, r 個の箱に n 個のボールをちょうど 1 個ずつ余りがないように入れる, という条件ができあがりますね！明らかに, $n \neq r$ のときは 0 です. ボールの数と箱の数は一致していなければなりませんので.

では, 順番に考えていきます. $n = r$ と仮定します. まずはボールも箱も他と区別できるとき. 1 番目のボールをどの箱に入れるかで n 通り. 2 番目のボールをどの箱に入れるかで $n-1$ 通り. n 番目のボールをどの箱に入れるかは最後の 1 個の箱について 1 通り. すなわち, 制限がない場合の, $n = r$ という特別な場合です. というわけで,

$$n!$$

です.

他の場合についてはどうでしょうか. ボールが区別でき, 箱が区別できないとき, どの箱にどのボールを入れても状況は変わりません. 区別の付かないそれぞれの箱に, ちょうど 1 個ずつの異なるボールが入っている状況を思い描いてみると, ただの 1 通りしかないことが分かりますね. 他の場合についても同様です. 要するに, ボールと箱のどちらかが他と区別ができないようなものならば,

$$1$$

通りなのです.

6　まとめ

n 個のボールを r 個の箱に分ける場合の数

ボール	箱	制限なし	最低 1 個 ($n < r$ なら 0)	高々 1 個 ($n > r$ なら 0)	ちょうど 1 個 ($n \neq r$ なら 0)
異	異	r^n	$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \cdot {}_rC_i \cdot i^n$	${}_rP_n$	$n!$
異	同	$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} \cdot {}_iC_j \cdot j^n$	$\frac{1}{r!} \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \cdot {}_rC_i \cdot i^n$	1	1
同	異	${}_{n+r-1}C_n$	${}_{n-1}C_{r-1}$	${}_rC_n$	1
同	同	未解決	未解決	1	1