3 項間漸化式によって定義される数列の一般項

Iga(rashi)

2009 年 1 月 5 日

この文書の目的は, 隣接三項間漸化式

$$af_{n+2} + bf_{n+1} + cf_n = 0$$

によって定義される数列 $\{f_n\}$ の一般項を表す公式を導くことです. 結論から先に述べると, 次のようになります.

$$f_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor -1} (-1)^{n-i} a^{-n+2+i} b^{n-3-2i} c^i ({}_{n-2-i}C_i b f_2 + {}_{n-3-i}C_i c f_1) + \frac{1+(-1)^n}{2} f_2 \left(-\frac{c}{a}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1}$$

ただし, $n \geq 3$ で, 特性方程式は重解を持たないものとします.

1 素朴な解き方

高等学校の数学では, 普通は次のように隣接三項間漸化式を解きます. まず, f_{n+i} を x^i に置き換えた次の方程式を考えます.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

この方程式は, 特性方程式と呼ばれます. 両辺を a で割って

$$x^2 + (b/a)x + (c/a) = 0$$

この方程式の二つの解を α, β とおくと, 解と係数の関係により

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

なので, ちょっとした式変形をしてやると

$$f_{n+2} - \alpha f_{n+1} = \beta(f_{n+1} - \alpha f_n)$$

より

$$f_{n+1} - \alpha f_n = (f_2 - \alpha f_1)\beta^{n-1} \tag{1.1}$$

同様に

$$f_{n+1} - \beta f_n = (f_2 - \beta f_1)\alpha^{n-1} \tag{1.2}$$

$\alpha \neq \beta$ のとき, (1.2) から (1.1) を引いて整理すると

$$f_n = \frac{(f_2 - \beta f_1)\alpha^{n-1} - (f_2 - \alpha f_1)\beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

となります. $\alpha = \beta$ のときは

$$f_{n+1} - \alpha f_n = (f_2 - \alpha f_1)\alpha^{n-1}$$

が成り立つので, 両辺を α^{n+1} で割ると

$$\frac{f_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{f_n}{\alpha^n} = \left(\frac{f_2}{\alpha^2} - \frac{f_1}{\alpha}\right)$$

となります. ここで, 数列 $\left\{\frac{f_n}{\alpha^n}\right\}$ は, 初項 $\frac{f_1}{\alpha}$, 交差 $\left(\frac{f_2}{\alpha^2} - \frac{f_1}{\alpha}\right)$ の等差数列なので

$$\frac{f_n}{\alpha^n} = \frac{f_1}{\alpha} + (n-1)\left(\frac{f_2}{\alpha^2} - \frac{f_1}{\alpha}\right)$$

となります. この両辺に α^n をかけて整理することにより

$$f_n = \left\{\left(\frac{f_2}{\alpha} - f_1\right)n + 2f_1 - \frac{f_2}{\alpha}\right\}\alpha^{n-1}$$

が得られます.

2 素朴な解き方の問題点

"素朴な解き方"における特性方程式の二つの解 α, β は, 一般に, 根号を含んでいてもよく, さらには虚数であることも許されます. 例えば, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_1 = f_2 = 1$ によって定義される数列 (フィボナッチ数列) を考えてみると, その特性方程式は

$$x^2 - x - 1 = 0$$

なので, その二つの解 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ を先の式に代入して

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

が得られます. ところで, 定義から明らかなように, フィボナッチ数列の一般項は整数です. それにも関わらず, 一般項を表す式には無理数が現れます. これは何故かと言うと, 考えてもみれば簡単なことで, $(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n$ を展開して整理すると, 上手い具合に整数の項が消え, $a\sqrt{5}$ の形をした項だけが残ります. したがって, それらを $\sqrt{5}$ で割ってやれば無理数が消えます. 実際, フィボナッチ数列の一般項を, 根号を使わずに表すことも可能です. 二項定理を使うと

$$(1+\sqrt{5})^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r(\sqrt{5})^r$$

$$(1-\sqrt{5})^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r(-\sqrt{5})^r$$

なので,

$$(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\{(\sqrt{5})^r-(-\sqrt{5})^r\} \tag{2.1}$$

となります. n が偶数のとき、$\sum$ の中は 0 になるので,

$$\begin{aligned}(2.1)&=\sum_{r=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}{}_nC_{2r-1}\{\sqrt{5}^{2r-1}-(-\sqrt{5})^{2r-1}\}\\&=2\sum_{r=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}{}_nC_{2r-1}\sqrt{5}^{2r-1}\end{aligned}$$

ここで, $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ は、$n+1$ 以下の最大の整数を表します. 今の場合, これは 0 から n までの間にある奇数の個数です. 以上により

$$\begin{aligned}f_n&=\frac{2}{2^n\sqrt{5}}\sum_{r=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}{}_nC_{2r-1}\sqrt{5}^{2r-1}\\&=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{r=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}{}_nC_{2r-1}\sqrt{5}^{2r-2}\\&=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{r=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}{}_nC_{2r-1}5^{r-1}\end{aligned}$$

これが, フィボナッチ数列の一般項その 2, です. このように, 一般項が有理数になる場合, 一般項を表す式から根号を除去することができます. 虚数単位が含まれる場合についても同様. しかし, どちらにせよ, 特性方程式の解を求めるという操作が必要です. 虚数がイヤンイヤンな人にとっては, 虚数が現れるかもしれない方法を用いることは死活問題です. さぁ大変. 困りました. 困っちゃったよー. というわけで, 特性方程式の解を求めずして一般項を表す式を作ることはできないのか, と考えました. 自分が. その結果, 先の結果が得られたのでありました.

3 対称式を基本対称式で表しましょうの巻

ここからは, 面倒なので, 特性方程式が重解を持たない場合についてのみ考えていくことにします. と言うか, 重解 α を持つ場合の結果

$$f_n=\left\{\left(\frac{f_2}{\alpha}-f_1\right)n+2f_1-\frac{f_2}{\alpha}\right\}\alpha^{n-1}$$

は, 単純すぎてつまらないのです. 実際, 重解を持つならば $\alpha=-\frac{b}{2a}$ であり, 特性方程式の各項の係数が整数であれば, 上記の式の中に根号と虚数単位は現れません. ぶへへ. さて, 重解を持たないときは

$$f_n=\frac{(f_2-\beta f_1)\alpha^{n-1}-(f_2-\alpha f_1)\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} \tag{3.1}$$

となることは先に書いた通り. これの α と β を入れ替えると, 分子の符号, 分母の符号がそれぞれ逆になり, 結果としては全体としての符号は変わらず, つまるところ元と同じ式になります. このように, 変数を入れ替え

ても元と同じ式になる式のことを対称式と言います．例えば，もっと単純なもので言えば

$$x^2+xy+y^2$$

は x と y についての対称式です．そして，対称式は基本対称式の多項式として表すことができることが知られています．この事実は，対称式の基本定理と呼ばれています．基本対称式とは，二変数 α, β の場合について言えば，$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ のことです．したがって，(3.1) は α と β の対称式であることから，二つの基本対称式 $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ を用いて表すことができます．さらに言うと，解と係数の関係により $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ なので，(3.1) は a, b, c のみを用いて表すことができることが分かります．やったね！扱いやすいように (3.1) を変形すると

$$f_n=f_2\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}-f_1\alpha\beta\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta} \tag{3.2}$$

となります．これが対称式であることは，次の事実により確かめられます．

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}&=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots+\alpha^2\beta^{n-3}+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^{n-1-i}\beta^i\end{aligned}$$

これって対称式だよね. えへへ．というわけで，以下では対称式

$$A_n=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\alpha^2\beta^{n-2}+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n=\sum_{i=0}^{n}\alpha^{n-i}\beta^i$$

を基本対称式で表すことを考えていきますよ．ちなみに，A_n を使って (3.2) を表すと

$$f_n=f_2A_{n-2}+f_1\alpha\beta A_{n-3}$$

です．ところが，各 i について A_i を具体的に求めることは割に簡単なのですが，A_n を n の式として表すにはどうすればいいのか，皆目見当も付きません．公式らしい公式があるのでしょうか．なんてことを考えて，とりあえずは A_i を順に求めていきました．Mathematica の助けも借りました．

$$\begin{aligned}
A_1&=(\alpha+\beta)\\
A_2&=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\\
A_3&=(\alpha+\beta)^3-2\alpha\beta(\alpha+\beta)\\
A_4&=(\alpha+\beta)^4-3\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+\alpha^2\beta^2\\
A_5&=(\alpha+\beta)^5-4\alpha\beta(\alpha+\beta)^3+3\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)\\
A_6&=(\alpha+\beta)^6-5\alpha\beta(\alpha+\beta)^4+6\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^2-\alpha^3\beta^3\\
A_7&=(\alpha+\beta)^7-6\alpha\beta(\alpha+\beta)^5+10\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^3-4\alpha^3\beta^3(\alpha+\beta)\\
A_8&=(\alpha+\beta)^8-7\alpha\beta(\alpha+\beta)^6+15\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^4-10\alpha^3\beta^3(\alpha+\beta)^2+\alpha^4\beta^4\\
A_9&=(\alpha+\beta)^9-8\alpha\beta(\alpha+\beta)^7+21\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^5-20\alpha^3\beta^3(\alpha+\beta)^3+5\alpha^4\beta^4(\alpha+\beta)\\
A_{10}&=(\alpha+\beta)^{10}-9\alpha\beta(\alpha+\beta)^8+28\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^6-35\alpha^3\beta^3(\alpha+\beta)^4+15\alpha^4\beta^4(\alpha+\beta)^2-\alpha^5\beta^5
\end{aligned}$$

規則性があるんだかないんだか, よく分からない式が出てきました. しかし！よーくよーく見てみると, 二項係数が随所に表れていることに気付けます. そうした視察によって

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=0}^{n} \alpha^{n-i}\beta^i \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i {}_{n-i}C_i (\alpha\beta)^i (\alpha+\beta)^{n-2i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} {}_{n-i}C_i (-\alpha\beta)^i (\alpha+\beta)^{n-2i}
\end{aligned}$$

が得られます. 以下, このことを証明していきます. まず, $A_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ は次の等式を満たします.

$$A_{n+2} = (\alpha+\beta)A_{n+1} - (\alpha\beta)A_n$$

このことは, 計算によって簡単に確かめられます. したがって

$$B_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i {}_{n-i}C_i (\alpha\beta)^i (\alpha+\beta)^{n-2i}$$

とおいて, これが上と同様の等式を満たすことを確かめればよいわけです.

$$(\alpha+\beta)B_{n+1} + (\alpha\beta)B_n \tag{3.3}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^i {}_{n+1-i}C_i (\alpha\beta)^i (\alpha+\beta)^{n+2-2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{i+1} {}_{n-i}C_i (\alpha\beta)^{i+1} (\alpha+\beta)^{n-2i} \tag{3.4}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^i {}_{n+1-i}C_i (\alpha\beta)^i (\alpha+\beta)^{n+2-2i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1} (-1)^i {}_{n+1-i}C_{i-1} (\alpha\beta)^i (\alpha+\beta)^{n+2-2i} \tag{3.5}$$

(i) n が奇数のとき, $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ なので, $i=0$ の場合を別に考えて

$$\begin{aligned}
(3.5) &= (-1)^0 {}_{n+1}C_0 (\alpha\beta)^0 (\alpha+\beta)^{n+2} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^i ({}_{n+1-i}C_i + {}_{n+1-i}C_{i-1}) (\alpha\beta)^i (\alpha+\beta)^{n+2-2i} \\
&= (-1)^0 {}_{n+2}C_0 (\alpha\beta)^0 (\alpha+\beta)^{n+2} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^i {}_{n+2-i}C_i (\alpha\beta)^i (\alpha+\beta)^{n+2-2i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^i {}_{n+2-i}C_i (\alpha\beta)^i (\alpha+\beta)^{n+2-2i} \\
&= B_{n+2}
\end{aligned}$$

(ii) n が偶数 $(=2m)$ のとき, $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ なので, (i) と同様にして, 今度は $i=0$ と $i=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1$ の場合を別に考えて

$$
\begin{aligned}
(3.5) &= (-1)^0{}_{n+2}C_0(\alpha\beta)^0(\alpha+\beta)^{n+2}+(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}{}_{n+1-(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)}C_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1-1}(\alpha\beta)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}(\alpha+\beta)^{n+2-2(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)} \\
&\quad +\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^i{}_{n+2-i}C_i(\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n+2-2i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}(-1)^i{}_{n+2-i}C_i(\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n+2-2i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+2}{2}\rfloor}(-1)^i{}_{n+2-i}C_i(\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n+2-2i} \\
&= B_{n+2}
\end{aligned}
$$

途中の式変形では, 次の結果を使いました.

$$
\begin{aligned}
{}_{n+1-(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)}C_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1-1} &= {}_mC_m \\
&= {}_{m+1}C_{m+1} \\
&= {}_{n+2-(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1)}C_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}
\end{aligned}
$$

以上により, 証明完了です.

4　いざ

前節までの結果により

$$
f_n=f_2A_{n-2}+f_1\alpha\beta A_{n-3} \tag{4.1}
$$

$$
A_n=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{}_{n-i}C_i(-\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n-2i} \tag{4.2}
$$

(4.2) を (4.1) に代入すると

$$
\begin{aligned}
f_n &= f_2\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}{}_{n-2-i}C_i(-ab)^i(a+b)^{n-2-2i}+f_1\alpha\beta\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor}{}_{n-3-i}C_i(-ab)^i(a+b)^{n-3-2i} \\
&= f_2\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{}_{n-2-i}C_i(-ab)^i(a+b)^{n-2-2i}+f_1\alpha\beta\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}{}_{n-3-i}C_i(-ab)^i(a+b)^{n-3-2i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}(-\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n-3-2i}\left\{f_2(\alpha+\beta){}_{n-2-i}C_i+f_1(-\alpha\beta){}_{n-3-i}C_i\right\}+f_2\sum_{i=\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{}_{n-2-i}C_i(-\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n-2-2i}
\end{aligned}
$$

ここで, $n=2m+2$ のとき

$$
\begin{aligned}
\left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1\right)-\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor &= \left(\lfloor\frac{2m+2}{2}\rfloor-1\right)-\lfloor\frac{2m+2-1}{2}\rfloor \\
&= m-m \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$n=2m+1$ のとき

$$\begin{aligned}\left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1\right)-\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor&=\left(\lfloor\frac{2m+1}{2}\rfloor-1\right)-\lfloor\frac{2m+1-1}{2}\rfloor\\&=(m-1)-m\\&=-1\end{aligned}$$

したがって, 上式の右側の $\sum$ は, n が奇数のときは 0, 偶数のときは $i=\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ の場合についてのみ考えれば
よいことが分かります. そして, $n=2m$ (偶数) のとき, $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1=m-1$ であることから

$$\begin{aligned}f_2\sum_{i=\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{}_{n-2-i}C_i(-\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n-2-2i}&=f_2\cdot{}_{2m-2-(m-1)}C_{m-1}(-\alpha\beta)^{m-1}(\alpha+\beta)^{2m-2-2(m-1)}\\&=f_2\cdot{}_{m-1}C_{m-1}(-\alpha\beta)^{m-1}(\alpha+\beta)^0\\&=f_2(-\alpha\beta)^{m-1}\end{aligned}$$

あらっ. 随分と簡単な形になりましたねっ. したがって, n が偶数のとき 1, 奇数のとき 0 になる関数

$$\frac{1+(-1)^n}{2}$$

を用いると

$$\begin{aligned}f_n=&\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}(-\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n-3-2i}\left\{f_2(\alpha+\beta)_{n-2-i}C_i+f_1(-\alpha\beta)_{n-3-i}C_i\right\}+f_2\sum_{i=\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{}_{n-2-i}C_i(-\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n-2-2i}\\=&\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}(-\alpha\beta)^i(\alpha+\beta)^{n-3-2i}\left\{f_2(\alpha+\beta)_{n-2-i}C_i+f_1(-\alpha\beta)_{n-3-i}C_i\right\}+\frac{1+(-1)^n}{2}f_2(-\alpha\beta)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}\end{aligned}$$

さらに, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $-\alpha\beta=-\frac{c}{a}$ を代入すると

$$f_n=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}\left(-\frac{c}{a}\right)^i\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-3-2i}\left\{f_2\left(-\frac{b}{a}\right)_{n-2-i}C_i+f_1\left(-\frac{c}{a}\right)_{n-3-i}C_i\right\}+\frac{1+(-1)^n}{2}f_2\left(-\frac{c}{a}\right)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}$$

$\sum$ の中の $-\frac{1}{a}$ を全てかけると

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{a}\right)^{n-2-i}&=(-1)^{n-2-i}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-2-i}\\&=(-1)^{n-i}a^{-n+2+i}\end{aligned}$$

なので

$$f_n=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}(-1)^{n-i}a^{-n+2+i}b^{n-3-2i}c^i({}_{n-2-i}C_ibf_2+{}_{n-3-i}C_icf_1)+\frac{1+(-1)^n}{2}f_2\left(-\frac{c}{a}\right)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}$$

が得られます. 長かった⋯.